Рассмотрим осесимметричное течение жидкости в цилиндрических координатах , где все производные по θ равны нулю  Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с переменной вязкостью μ имеют следующий вид:

Уравнение неразрывности (условие несжимаемости):



Радиальная компонента уравнения Навье-Стокса:



Учитывая vθ = 0\) и осевую симметрию, упрощаем:



Осевая компонента уравнения Навье-Стокса:



Примечания:

1. μ = μ(*r*, *z*) — динамическая вязкость, зависящая от координат.

2. ρ — плотность жидкости (постоянная для несжимаемого течения).

3. *gr, gz* — компоненты ускорения свободного падения.

4. Вязкие члены записаны в наиболее общем виде, включая дивергентную форму для переменной вязкости.

Если вязкость постоянна (μ = const), уравнения упрощаются, так как ∇μ = 0.

Нужно из конвективного члена выделить дивергентную часть:

Используем уравнение неразрывности. Это часто делают в численных методах (например, в методах конечных объёмов) для обеспечения сохранения импульса.

Исходные члены:

Конвективный член в радиальной компоненте:



Шаг 1: Перепишем конвективный член в консервативной форме

Раскроем производные произведения:



но это не помогает. Вместо этого воспользуемся уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости:



Умножим его на :



Отсюда можно выразить :



Подставим это в 



Шаг 2: Выделим дивергентную часть

Заметим, что:



Но это не упрощает выражение. Вместо этого введём конвективный поток:



Согласно уравнению неразрывности, выражение в скобках равно нулю, поэтому:



Итоговое представление:

Теперь радиальную компоненту можно записать в виде:



где:

- Вязкий поток:



- Конвективный поток:



- Оставшийся источник:



Упрощённая форма:

Если объединить оба потока  то:



где:



Вывод:

- Конвективные члены можно частично (или полностью) включить в дивергентный член, используя уравнение неразрывности.

- Такой подход полезен в вычислительной гидродинамике (CFD), где консервативная форма обеспечивает точное сохранение импульса.

- Член остаётся в источнике, так как он возникает из-за кривизны координат и не выражается через поток.

**Осевая компонента уравнения Навье-Стокса в дивергентной форме**

Рассмотрим осевую *z* – компоненту) уравнения Навье-Стокса для осесимметричного течения с переменной вязкостью μ.

Исходное уравнение в цилиндрических координатах *r, z*:



---

Шаг 1: Перенос конвективных членов в правую часть



---

Шаг 2: Представление конвективного члена в дивергентной форме

Конвективный член:



Используем уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:



Перепишем конвективный член, добавляя и вычитая 



Из уравнения неразрывности:



поэтому:



Объединяя члены, получаем дивергентную форму:



---

Шаг 3: Определение потоков  и источника *S*

Разделим уравнение на:

1. Градиент давления: 

2. Вязкий поток 



3. Конвективный поток 



4. Источник *S*:

*S = ρgz*.

---

Итоговое уравнение в форме 



где:

- Полный поток 



- Источник (гравитация).

---

Физическая интерпретация

1.  — градиент давления вдоль оси *z*.

2.  — вязкие напряжения (трение).

3.  — конвективный перенос импульса.

4. \*\*\(S\)\*\* — внешняя сила (гравитация).

---

Сравнение с радиальной компонентой

- В радиальной компоненте был дополнительный криволинейный член , которого нет в осевой компоненте.

- Конвективные члены в обоих случаях выражаются через дивергенцию потока .

- Давление и вязкость вносят вклад в потоки аналогичным образом.

Такой подход удобен для численного моделирования, так как обеспечивает точное сохранение импульса.